Un petit télescope Cassegrain

①

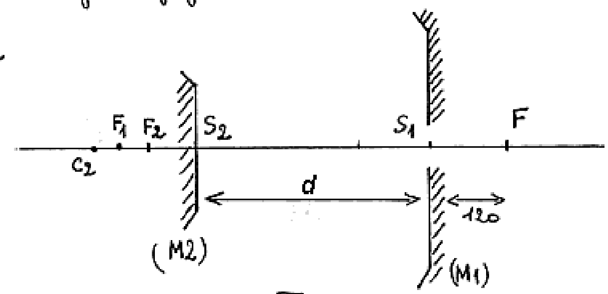
1.1. La distance focale équivalente F_{eq} serait la distance focale d'un miroir concave unique qui donnerait d'un objet à l'infini une image de même dimension que celle obtenue avec la combinaison (M1)(M2).

Si un objet à l'infini a un diamètre angulaire θ, son image dans le plan focal de (M1) a pour diamètre $f_1 . \theta$ (f_1 = focale de M1)

Le miroir (M2) introduit un grandissement transversal γ_2. L'image finale a donc un diamètre $\gamma_2 f_1 \theta = F_{eq} . \theta$

1.2. Le foyer F du télescope est l'image du foyer F_1 de (M1) dans (M2)

$$\frac{1}{\overline{S_2F_1}} + \frac{1}{\overline{S_2F}} = \frac{2}{\overline{S_2C_2}} \qquad \text{avec } \overline{S_2C_2} = -R_2$$



$$\overline{S_2F_1} = \overline{S_2S_1} + \overline{S_1F_1} = d - \frac{1000}{2} = d - 500$$

$$\overline{S_2F} = \overline{S_2S_1} + \overline{S_1F} = d + 120$$

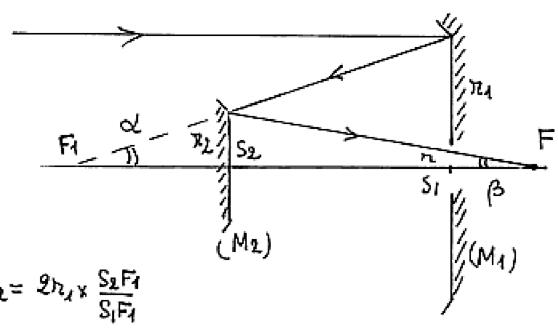
D'où : $$\frac{2}{R_2} = -\left[\frac{1}{d-500} + \frac{1}{d+120}\right]$$

Le grandissement transversal apporté par (M2) est $\gamma_2 = -\frac{\overline{S_2F}}{\overline{S_2F_1}} = \frac{d+120}{500-d} = \frac{F_{éq}}{f_1}$

On a donc $\frac{d+120}{500-d} = \frac{2000}{500} = 4$ d'où $\underline{d = 376 \text{ mm}}$

On en déduit $\underline{R_2 = 330{,}7 \text{ mm}}$

1.3. Un faisceau de rayons parallèles à l'axe principal se réfléchit sur (M1) en convergeant vers F_1.



Un rayon tombant sur le bord de (M1) est reçu sur (M2) si $\text{tg}\,\alpha = \frac{r_1}{S_1F_1} = \frac{r_2}{S_2F_1}$

D'où le diamètre minimal de (M2) : $2r_2 = 2r_1 \times \frac{S_2F_1}{S_1F_1}$

$2r_2 = 250 \times \frac{124}{500} = \underline{62 \text{ mm}}$

De même le faisceau réfléchi par (M2) doit passer par le trou de diamètre $2r$

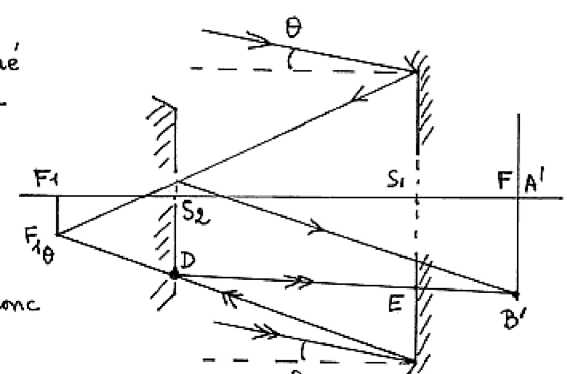
$$\text{tg}\,\beta = \frac{r}{S_1F} = \frac{r_2}{S_2F} \quad \Rightarrow \quad 2r = 2r_2 \times \frac{120}{496} = \underline{15 \text{ mm}}$$

②

Un faisceau de rayons parallèles incliné de θ sur l'axe principal vient converger au foyer secondaire $F_{1\theta}$ de (M1)

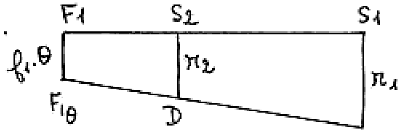
(on a $F_1F_{1\theta} = f_1 \times \theta$). Le rayon optimal de (M2) est S_2D.

Le rayon se réfléchissant en D sur (M2) coupe le plan de (M1) en E. Le trou doit donc avoir un rayon S_1E.



(échelle non respectée)

Un petit télescope Cassegrain

2.1. 

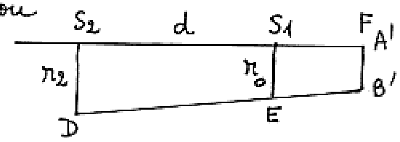
$$\frac{r_1 - f_1\theta}{S_1F_1} = \frac{r_1 - r_2}{S_1S_2}$$

Il faut prendre pour θ la moitié du champ désiré (symétrie de révolution autour de l'axe principal) soit $45' = 0{,}01309$ radian

D'où $r_2 = r_1 - \frac{S_1S_2}{S_1F_1}(r_1 - f_1.\theta) = 125 - \frac{376}{500}(125 - 500 \times 0{,}01309) = 35{,}92\text{ mm} \simeq 36\text{ mm}$

Le diamètre de (M_2) doit donc être de $\underline{72\text{ mm}}$

2.2. De même pour calculer le diamètre du trou



$$\frac{r_2 - r_0}{d} = \frac{r_0 - A'B'}{S_1F} \quad \text{avec } A'B' = 4 f_1.\theta$$

(puisque $\gamma_2 = 4$ cf question 1.2)

d'où $$r_0 = \frac{r_2 \frac{S_1F}{d} + A'B'}{1 + \frac{S_1F}{d}} = \frac{36 \times \frac{120}{376} + 4 \times 500 \times 0{,}01309}{1 + \frac{120}{376}} = 28{,}55\text{ mm}$$

Le diamètre du trou est donc $\simeq \underline{58\text{ mm}}$

③ .1. $\theta = 20'' = 0{,}000097$ radian. Le diamètre de l'image dans le plan focal du télescope est $\theta \times F_{eq} = 97.10^{-6} \times 2000 = \underline{0{,}194\text{ mm}}$

3.2. Pour un instrument de diamètre d'ouverture $2R$ la diffraction impose une limite de résolution $\varepsilon = 0{,}6\frac{\lambda}{R}$

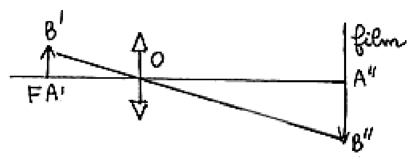
soit avec $\lambda = 550.10^{-9}\text{ m}$ et $R = r_1 = 125.10^{-3}\text{ m}$ $\quad \varepsilon = 2{,}64.10^{-6}\text{ radian} \simeq 0{,}54''$

3.3. Le grossissement du télescope G doit être tel que 2 points séparés de ε soient vus avec un écart angulaire de $1'$ dans l'oculaire.

Il faut donc $G = \frac{60}{0{,}54} = 111$

La distance focale du système $(M_1)(M_2)$ étant de 2000 mm, celle de l'oculaire doit être $\frac{2000}{111} \simeq \underline{18\text{ mm}}$ (on suppose que le système est afocal, l'œil visant à l'infini)

3.4. $0{,}54''$ à la surface de Mars équivalent à $\frac{0{,}54 \times 6790}{20} = \underline{183{,}3\text{ km}}$

④ 

$$\frac{1}{\overline{OA''}} - \frac{1}{\overline{OA'}} = \frac{1}{\varphi} \quad \Rightarrow \overline{OA'} = \frac{\varphi.\,\overline{OA'}}{\varphi - \overline{OA'}}$$

$$\overline{OA'} = \frac{12 \times 150}{12 - 150} = -\underline{13\text{ mm}}$$

Le grandissement transversal est $\gamma = \frac{\overline{OA''}}{\overline{OA'}} = \frac{150}{-13} = -11{,}54$

On obtient une image de diamètre $0{,}194 \times 11{,}54 = \underline{2{,}24\text{ mm}}$

La lentille est placée à 133 mm derrière (M_1)

5

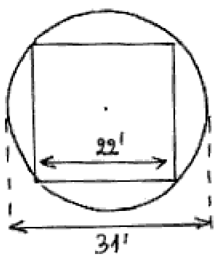
5.1. La largeur maximale du champ dans le plan focal est :

$1024 \times 13 = 13312\ \mu m = 0{,}0133\ m$ ce qui correspond à un champ angulaire $\theta = \frac{0{,}0133}{2} = 6{,}66.10^{-3}$ radian $\simeq 22'$

Deux points objets à l'infini seront séparés si leurs images se forment sur 2 pixels distincts. Soit une limite de résolution $\varepsilon_{CCD} = \frac{13.10^{-6}}{2} = 6{,}5.10^{-6}$ radian $= 1{,}3''$

5.2. Le diamètre angulaire moyen de la Lune est $\frac{3476}{384\,000} = 9{,}052.10^{-3}$ radian soit environ $31'$, supérieur au champ couvert par le capteur.

On peut photographier $\frac{22}{31} \times 3476 = 2467$ km $\times$ 2467 km sur la Lune



Les plus petits détails observables ont une dimension de $\frac{2467}{1024} = \underline{2{,}4 \text{ km}}$

5.3. Pour photographier Mars il faut agrandir son image de façon que la limite de résolution imposée par la diffraction corresponde à celle imposée par le capteur : un grandissement de $\frac{1{,}3}{0{,}54} = 2{,}4$ est donc nécessaire. Mais étant donné le faible diamètre de la planète, l'image ne révèlera que très peu de détails : $0{,}194 \times 2{,}4 = 0{,}4656$ mm $= 465{,}6\ \mu m$

soit $\frac{465{,}6}{13} = 36$ pixels. On ne pourrait vraiment exploiter ce capteur qu'en utilisant un télescope de plus grand diamètre.